

フラクタル性に着目した脳機能ネットワークの接続構造の分析と ネットワークの高品質化への応用

四條 能伸[†] 荒川 伸一^{†,††} 村田 正幸^{†,††}

[†] 大阪大学 大学院情報科学研究科
〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 1-5
^{††} NICT/大阪大学 Cinet
〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 1-4

E-mail: †{y-shijo,arakawa,murata}@ist.osaka-u.ac.jp

あらまし インターネットは世界最大規模の人工ネットワークであり、大規模複雑化するインターネットをより高品質なものにすることが望まれている。高品質化への手がかりは、多彩な機能を高度なレベルで発揮している脳機能ネットワークに見出すことができる。脳機能ネットワークの特性に関する研究として、トポロジー構造をグラフ理論にもとづいて解析することが広く行われており、インターネットには見られない脳機能ネットワークに固有の構造としてボクセルレベルのトポロジーにおいてフラクタル性を有していることが明らかにされている。したがって、脳機能ネットワークのフラクタル性を取り入れることでインターネットの高品質化が期待できる。ただし、そのためには脳機能ネットワークの接続構造とその構造によってもたらされる利点を解明しなければならない。そこで本稿では、脳機能ネットワークの構造的特徴としてフラクタル性に着目し、フラクタル性の要因となる接続構造およびその構造が通信品質に与える影響を明らかにする。分析の結果、脳機能ネットワークは機能モジュールの接続性に関するフラクタル性を有しており、比較対象トポロジーと比べて多くの良質な経路を確保していることがわかった。

キーワード 脳機能ネットワーク、フラクタル、インターネット、接続構造、階層モジュール構造

Analysis of the brain functional networks connection structure and its application to the information network

Yoshinobu SHIJO[†], Shin'ichi ARAKAWA^{†,††}, and Masayuki MURATA^{†,††}

[†] Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University
1-5 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan

^{††} Center for Information and Neural Networks (CiNet),
National Institute of Information and Communications Technology(NICT), and Osaka University
1-4 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan

E-mail: †{y-shijo,arakawa,murata}@ist.osaka-u.ac.jp

Abstract The Internet is one of the largest artificial network in the world, and it is desired to make large-scale complex Internet into higher quality. Clues to the high quality can be found in human brain function networks (BFNs) which show various functions at high level. There are many researches to analyze brain function network topology with graph theory. Those show BFNs have fractality in topology at voxel level, on the other hand the Internet does not have. Therefore, the Internet can be high quality by incorporating the fractality of BFNs. For that purposes, however, we must analyze the connection structure and its advantages of BFNs. This report reveals the connection structure that leads fractality and the advantages of that structure. Result of analysis shows that BFNs have fractality in functional modules connectivity and many superior paths compared to comparison topology.

Key words Brain Functional Networks, Fractal, Internet, Connection Structure, Hierarchical Module Structure

1. はじめに

インターネットは、多数の自律システム (AS: Autonomous System) が相互に接続することにより構成される世界最大規模の人工ネットワークである。インターネットが社会インフラとして果たす役割は年々大きくなっており、その重要性から、インターネットをより高品質なものにすることが望まれている。インターネットでは全体を管理・制御することはなく、AS が自律的に動作することにより、大規模ネットワークの運用・管理に関する問題はある程度回避できている。しかしながら、AS はインターネット全体の構造を考えずに利己的に接続関係を構築するため、例えば今後 HyperGiant と呼ばれる一部の AS に多量のトラフィックが集中すると予想されている [1]。そのためインターネットが脆弱なものになりつつある。このような背景から、高品質なインターネットを構築するための新たなアプローチが必要である。

我々の研究グループでは、大規模複雑化するインターネットの高品質化への手がかりとして、ヒトの脳機能ネットワークに着目している。ヒトの脳は多種多様な機能を発揮しているが、これらの機能は生まれながらにして持ち合わせたものではなく、ヒトが成長する過程において学習することで習得している。また、その成長の段階に応じてネットワークを最適化することで、非常に少ない消費エネルギーで管理・制御されていることがわかっている [2]。さらに、ヒトの脳が機能を発揮するときの処理は他の生物と比べて高度に最適化されていることも明らかにされている [3]。そのため、ヒトの脳機能ネットワークの特性の一部をネットワークの設計・制御に取り入れることで、インターネットの高品質化が期待される。

脳機能ネットワークの特性に関する研究として、近年では fMRI (functional Magnetic Resonance Imaging) を用いることで脳機能ネットワークトポロジーを生成し、そのトポロジーをグラフ理論にもとづいて解析することが広く行われている。それらの研究成果として、ボクセルレベルのトポロジーにおいて、ノードの次数分布がべき則に従うこと、ネットワークの規模に対してノード間の平均ホップ長が小さくなるスモールワールド性を有すること、ノード間が局所的に密に連結されるモジュール構造、およびモジュールが階層的に連結される階層モジュール構造を有していることなどが明らかにされた。また、機能モジュールが各々の役割を果たすため十分に独立しており、かつ円滑な情報処理のため機能モジュール間が十分に接続されるという相反する関係を満たすために、トポロジーがフラクタル性を有していることも明らかになってきた [4]。

インターネットの AS レベルトポロジーは、次数分布がべき則に従う点、スモールワールド性を有する点において、脳機能ネットワークと特徴を共有している。一方で、階層モジュール構造およびフラクタル性を有していないことが明らかにされており、この点は脳機能ネットワークと異なる [5]。したがって、脳機能ネットワークの階層モジュール構造やフラクタル性を取り入れることでインターネットの高品質化が期待できる。ただし、そのためには脳機能ネットワークの接続構造とその構造に

よってもたらされる利点を解明しなければならない。そこで本稿では、脳機能ネットワークに固有の特徴であるフラクタル性に着目し、フラクタル性の要因となる接続構造およびその構造がもたらす利点を明らかにする。脳機能ネットワークは階層モジュール構造も有するが、フラクタル性に着目するのは階層モジュール構造と密接に関連しているためである [6]。

本稿の構成は以下の通りである。2 章では、本稿に関連する研究として、ネットワークトポロジーにおけるフラクタルと脳機能ネットワークについて述べる。3 章では、脳機能ネットワークの接続構造について述べ、4 章では、その接続構造が与える経路品質について述べる。5 章では、本稿のまとめと今後の課題について述べる。

2. 関連研究

2.1 ネットワークトポロジーにおけるフラクタル

フラクタルは幾何学の分野で導入された概念であるが、Song らはネットワークトポロジーに対してその概念を拡張した [7]。具体的には、フラクタル次元 D_B が有限値になる時、トポロジーがフラクタル性を有すると定義する。 D_B は、ネットワークトポロジーの全ノードをホップ長 l_B 未満で到達可能な集合に分割する際に必要となる最小の集合数 $N_B(l_B)$ を用いて、式 (1) により定義される。

$$N_B(l_B)/N \sim l_B^{D_B} \quad (1)$$

ここで、 N はネットワークトポロジーのノード数である。

D_B が有限のとき、ネットワークの粒度に相当する l_B と、その粒度におけるノード数に相当する $N_B(l_B)$ の関係は、スケール性を失う。つまり、ネットワークトポロジーにおけるフラクタル性とは、ネットワーク粒度に対するノード数の割合が保存される性質をいう。

2.2 脳機能ネットワーク

fMRI では、脳全体を数万個のボクセルに分割し、それぞれのボクセルにおける神経活動の時系列データを取得できる。脳機能は神経活動の上に成り立っているため、時間に対する神経活動変化の相関が高いボクセル間は、脳機能的に相互作用を及ぼし合っていたことになる。そこで、ボクセルをノードとみなし、相関値がある閾値以上となるボクセル間にリンクを構築すると、脳の機能的相互作用の関係を反映する脳機能ネットワークトポロジーを生成することができる [8]。なお、閾値によっては得られるトポロジーが非連結になるが、その場合は最も大きな連結成分のみを解析等の対象とすることが一般的である。

3. 脳機能ネットワークの接続構造の分析

本章では、脳機能ネットワークの接続構造として、どのようなノード間にリンクが構築されているか明らかにする。

3.1 分析に使用する脳機能ネットワークトポロジー

安静状態にある健康な被験者の脳活動を fMRI で計測し、得られたデータから脳機能ネットワークトポロジーを生成した。被験者は 1 人であり、ボクセル数は 80130 であった。生成されるトポロジーの規模を考慮し相関値の閾値を 0.95 に設定した

表1 各 Path(階層) のノード数およびリンク数

Path (階層)	ノード数	リンク数
1	1989	3007
2	432	654
3	179	288
4	146	236

ところ、11420 ノード、44049 リンクのトポロジーが得られた。以降ではこれをボクセルレベルトポロジーと表記する。

ボクセルレベルトポロジーの規模は非常に大きいため、そのままでは接続構造を把握することは難しい。そこで本稿では、脳機能ネットワークのフラクタル性をもたらす階層モジュール構造に着目し、粒度の異なる複数のモジュールレベルトポロジーに対して分析を行う方法を採用する。また、この方法を採用することで、脳機能ネットワークの本質である「機能」に深く着目できるという利点が生まれる。ボクセルは fMRI の計測点であるため脳機能と直接関係はないが、モジュールは脳の 1 つの機能とみなすことができるためである。

階層モジュール構造の検出に Louvain 法 [9] を使用すると、階層 (Path) h においてノード i が属するモジュール番号 $M_i(h)$ が求まる。これを利用して以下の手順で Path h のモジュールレベルトポロジーを生成する。

- step1. ノード数が Path h のモジュール数に等しく、リンク数が 0 のトポロジーを生成する。
- step2. ボクセルレベルトポロジーにおいてノード (i, j) 間にリンクが存在し、かつ $M_i(h) \neq M_j(h)$ のとき、 $(M_i(h), M_j(h))$ 間にリンクを構築する。

こうして得られるトポロジーを、以降では Path h のモジュールレベルトポロジーと表記する。なお、ボクセルレベルトポロジーは Path0 とする。また、同一のモジュール番号をもつボクセルレベルのノードで構築されるトポロジーをモジュール内部トポロジーとし、モジュール番号はモジュール内部トポロジーのノード数が多い順に、整数で 1 から順に割り当てる。

生成されたモジュールレベルトポロジーのノード数およびリンク数を表 1 に示す。また、フラクタル性と次数分布を図 1 と図 2 に示す。図 1 と図 2 から、モジュールレベルトポロジーにおいてもフラクタル性を有し、次数分布がべき則に従うことがわかる。なお、十分な数のノード数があるモジュール内部トポロジーにおいても、次数分布がべき則に従うことを確認している。

3.2 分析に用いる指標

分析には以下の 3 つの指標を用いる。

a) 次数相関

リンクを構築しているノードペアの次数の相関を求める。算出には、[5] と [10] の 2 つの方法を使用するが、[5] の方法は規模が小さいトポロジーに対して適用することが難しいため、比較的規模の大きいモジュールレベルトポロジーのみに対して使用する。以下でそれぞれの方法の概要を述べる。

[5] の方法は、ランダムトポロジーと比べてリンクが多く (もしくは少なく) 存在するノードペアを判別できる。ノード次数

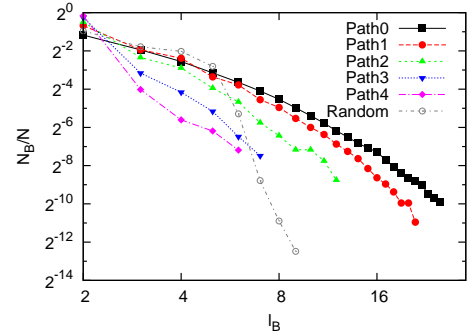


図1 モジュールレベルトポロジーのフラクタル性 (l_B 対 N_B の分布)

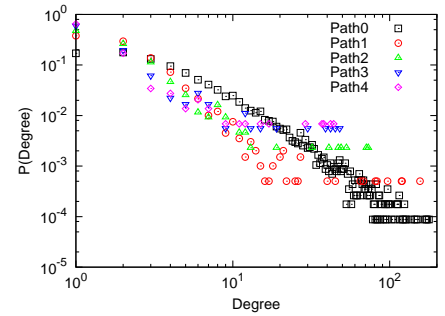


図2 モジュールレベルトポロジーの次数分布

(k_1, k_2) 間にリンクが存在する確率 $P(k_1, k_2)$ と、ランダムにリンク張替えを行ったトポロジーに対する同様の確率 $P_r(k_1, k_2)$ を用いて、次数相関 $R(k_1, k_2)$ は式 (2) で定義される。

$$R(k_1, k_2) = P(k_1, k_2) / P_r(k_1, k_2) \quad (2)$$

[10] の方法は、トポロジー全体として次数が高いノード間、次数が低いノード間にどの程度リンクが構築されているか判別できる。次数相関 l は、以下の式 (3) で定義される。

$$l = (L - L_{\min}) / (L_{\max} - L_{\min}) \quad (3)$$

ここで、ノード i の次数 k_i と、トポロジーのリンク集 E を用いて $L = \sum_{(i,j) \in E} k_i k_j$ とする。 $L_{\max}(L_{\min})$ は、元のトポロジーのリンクを張り替えることで得られる L の最大値 (最小値) である。 l は 0 から 1 の値となり、1 に近いほど次数が高いノード間、次数が低いノード間にリンクが多く構築されていることを意味する。

b) モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関

モジュール間を接続するリンクが、どのようなサイズのモジュール間にどの程度構築されているか求める。なお、対応するモジュール内部トポロジーのノード数が多いほど、モジュールサイズが大きいと定義する。

c) モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関

モジュール間を接続するリンクが、どのような次数のノードペア間に構築されているのか求める。ここで、ノード次数はモジュール内部トポロジーにおける次数とする。つまり、あるノードから同一モジュールへ向かうリンク数を k_{in} 、異なるモジュールへ向かうリンク数を k_{out} とすると、ノード次数は k_{in} となる。

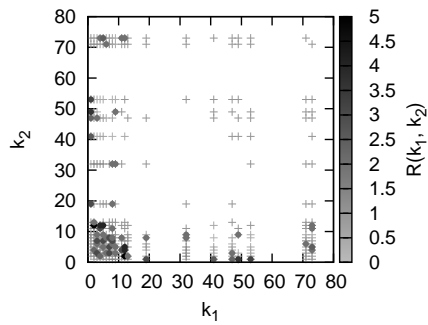


図3 モジュールレベルトポロジーの次数相関

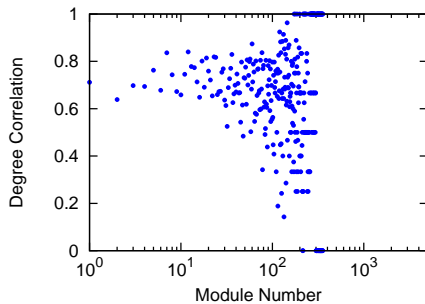


図4 モジュール内部トポロジーの次数相関

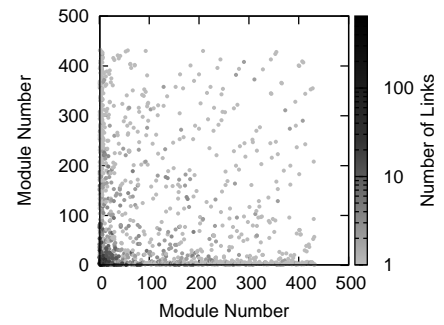


図5 モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関

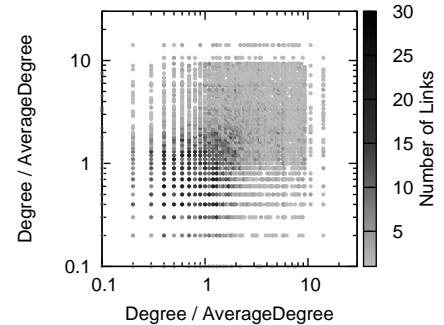


図6 モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関

3.3 分析結果

分析の結果、全ての Path において同様の結果が得られた。そこで、本節では Path2 の結果についてのみ言及する。

3.3.1 次数相関

まず、[5] の方法によって得られたモジュールレベルトポロジーの次数相関を図3に示す。 $R(k_1, k_2)$ の値が2以上の点を強調して示しているが、その点が k_1, k_2 が共に小さい範囲、もしくは一方が大きく一方が小さい範囲に集中していることがわかる。ここから、モジュールレベルトポロジーには反次数相関が認められる。

次に、[10] の方法によって得られたモジュール内部トポロジーの次数相関を図4に示す。図から、ノード数が多いモジュールにおける次数相関が高いことがわかる。ノード数が100以上となるモジュールにおける平均値を求めたところ0.726であった。一方、モジュールレベルトポロジーでは0.561であったが、反次数相関が認められる点で[5]の方法で得られた結果に一致する。なお、ノード数が少ない場合は[10]の方法は有効に作用しないため、ノード数が少ないモジュールは考慮に値しない。

3.3.2 モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関

図5に結果を示す。大きなモジュールは、様々な大きさのモジュールと多数リンクを構築していることがわかる。小さなモジュールも、リンク数は少ないものの、多様なモジュールとの間にリンクを構築していることがわかる。

3.3.3 モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関

図6に結果を示す。横軸・縦軸共に、モジュール間を接続するノードの次数を、そのノードが属するモジュール内部トポロジーの平均次数で割った値としている。分布が(1,1)周辺に集

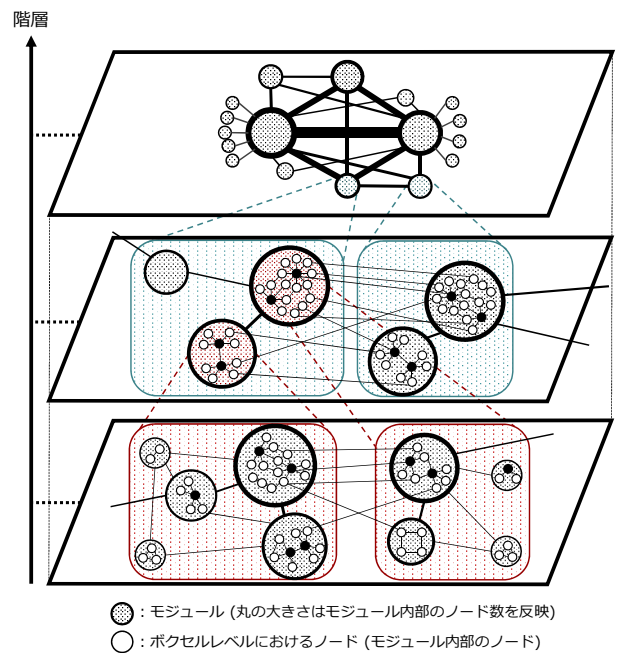


図7 分析結果を反映した脳機能ネットワークトポロジーの概略図

まっていることから、モジュール間リンクは各モジュールにおいて平均的な次数を持つノード間に多く存在することが分かる。

3.3.4 トポロジーの概略図

分析結果のまとめとして、図7に接続構造を反映したトポロジーの概略図を示す。線の太さは、モジュール間リンクの本数を表している。また、ボクセルレベルにおけるノードのうち黒く塗りつぶされているものは、各モジュールのハブノードにあたる。

接続構造の分析結果および概略図から、機能モジュールレベルにおいて、大域的にハブノードを介した効率の良い通信が可

能になり、さらにはフラクタル性により、そのような高効率通信を局所的にも行うことができると考えられる。さらに、ボクセルレベルのハブノード故障に対して、機能モジュール間の接続がロバストであると考えられる。

4. 脳機能ネットワークの経路品質の評価

脳機能ネットワークを情報ネットワークへ応用するにあたり、前章で明らかにした接続構造が通信品質に与える影響を明らかにすることは重要である。本章では、通信品質として特に機能間の経路の品質に着目し、その評価を行う。

4.1 評価方法

4.1.1 評価対象トポロジー

本稿では、複数のトポロジーにおいてホップ長の比較を行うことで、脳機能ネットワークの機能間の経路の品質を評価する。そこで、脳科学分野でしばしば用いられるモデルや、脳機能ネットワークの一部の構造的特徴のみを反映するモデルで生成されるトポロジーを比較対象とする。比較に用いたモデルは以下の通りである。

- Random モデル
- BA モデル [11] : 次数分布がべき則に従う構造的特徴を反映する
- Watts-Strogatz (WS) モデル [12] : 脳の局所的最適性と大域的効率性を反映する [13]
- Waxman モデル [14] : 解剖学的に近い位置にある機能モジュールが密に接続される特徴を反映する [15]

評価は Path1 から Path4 のモジュールレベルトポロジーそれぞれに対して行う。比較対象となるトポロジーは上述した 4 つのモデルを用いて生成し、ノード数とリンク数はそれぞれの Path のモジュールレベルトポロジーと一致させる。

4.1.2 評価指標

経路の品質について議論を行うためには、トポロジーの任意のノード間の全ての経路のホップ長を求めることが考えられるが、膨大な計算時間を要する。そこで、経路の導出に Yen らの K -最短路法 [16] を使用し、任意のノード間について最短路から順に上位 300 本までの経路のホップ長を求めるとする。任意のノード間の K 番目に短い経路の平均ホップ長を H_K としたとき、指標として H_1, H_2, \dots, H_{300} の分布を用いる。

4.2 評価結果

それぞれの Path における、 H_1, H_{300} 、および H_1 から H_{300} の平均および分散の値を表 2 に示す。表 2 から、全ての Path において、評価対象トポロジーの中で平均値が最小となっているのが脳機能ネットワークであることがわかる。これは、脳機能ネットワークがホップ長の観点で品質の良い経路を確保していることを意味している。同様に、分散が最小となっているのも脳機能ネットワークであることがわかる。これは、脳機能ネットワークが同等の品質の経路を多数確保していることを意味している。ここから、脳機能ネットワークの機能間には品質の良い経路が多数確保されているということが明らかになった。

また、表 2 から、平均値が 2 番目に小さくなっているのが BA モデルであることがわかる。脳機能ネットワークおよび BA モ

表 2 評価結果

		Brain	BA	Random	WS	Waxman
Path1	H_1	5.68	5.07	7.52	14.50	10.99
	H_{300}	8.33	9.04	14.17	18.90	15.78
	平均	7.85	8.35	13.11	17.96	14.88
	分散	0.20	0.42	1.11	0.70	0.69
Path2	H_1	3.79	4.02	5.90	12.03	6.01
	H_{300}	7.14	8.81	12.53	17.70	12.52
	平均	6.48	7.90	11.43	16.63	11.42
	分散	0.30	0.68	1.13	0.99	1.11
Path3	H_1	2.91	3.46	4.73	8.35	4.56
	H_{300}	6.58	8.71	11.27	14.46	11.21
	平均	5.81	7.69	10.16	13.28	10.10
	分散	0.40	0.82	1.10	1.21	1.13
Path4	H_1	2.71	3.32	4.45	8.66	4.41
	H_{300}	6.49	8.71	10.89	14.46	10.63
	平均	5.70	7.64	9.78	13.29	9.55
	分散	0.44	0.87	1.10	1.16	1.01

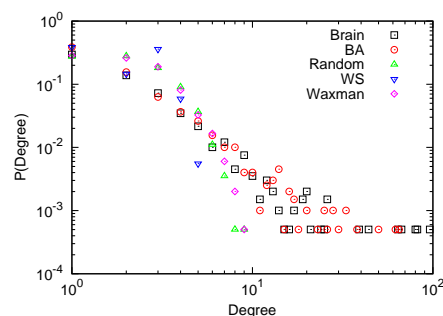


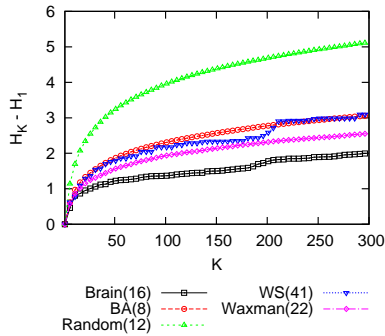
図 8 評価対象トポロジーの次数分布 (Path1)

デルと、その他の評価対象トポロジーとの違いは、図 8 に示すように次数分布がべき則に従っているか否かである。このことより、品質の良い経路を確保するためには、次数分布がべき則であることが重要であるといえる。一方で、脳機能ネットワークは BA モデルと比べて、分散が少なくともおよそ 1/2 になっている。つまり、脳機能ネットワークの方が平均値に近いホップ長となる経路が多数存在していることになる。ここから、品質の良い経路を多数確保することで高い通信効率を達成するために、脳機能ネットワーク固有の性質であるフラクタル性が寄与しているものと考えられる。

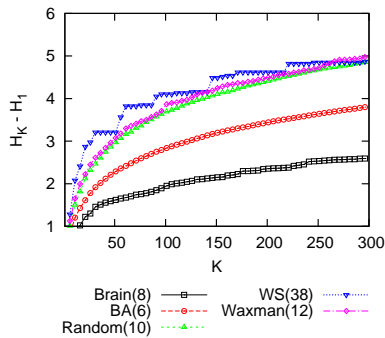
ここまでは、ネットワーク全体を考慮した経路の品質について議論を行ってきた。しかし、情報ネットワークにおける通信では、論理距離 (最短路のホップ長) が長いノードペアの経路の品質が特に重要となる。これは、論理距離の短いノードペアが遠回りの経路を用いて通信を行う場合、より論理距離が長いノードペアの通信へと置き換わるためである。そこで、それぞれのトポロジーについて、論理距離がトポロジーの直径 $\times 0.8$ (小数点以下切り捨て) となるノードペアを抽出し、 H_K の分布を求めた。トポロジーの直径は表 3 の通りである。結果を図 9 に示す。この図から、 H_K の値およびその変化が最も小さく抑えられているのは脳機能ネットワークであることがわかる。これは、論理距離が長いノードペア間の経路においても、脳機能

表 3 評価対象トポロジーの直径

	脳	BA	Random	WS	Waxman
Path1	20	11	16	52	28
Path2	11	8	13	48	15
Path3	6	7	10	22	9
Path4	5	7	9	27	10



(a) Path1



(b) Path2

図 9 論理距離を考慮した評価結果。括弧内の値はノードペアの論理距離を表している。Path3 と Path4 は Path1 と同様の傾向を示した。

ネットワークの品質が最も優れていることを意味している。一方で、ネットワーク全体として良い経路を有していた BA モデルは、Path1 において、論理距離が長いノードペア間の経路の品質が Waxman モデルよりも劣っている。ここから、情報ネットワークにおける通信でも、脳機能ネットワークのフラクタル性が有効に作用すると考えられる。

5. まとめと今後の課題

本稿ではインターネット高品質化の手がかりとして脳機能ネットワークのフラクタル性に着目し、その接続構造を明らかにした。また、接続構造が有する利点として、機能モジュール間に品質の良い経路が多数確保されていることを示した。ここから、インターネットに脳機能ネットワークの接続構造を適用することで、良質な経路が増加する見通しを得た。

本稿では接続構造が通信品質に与える影響として経路品質に着目したが、今後は他の影響についての検証を行う予定であ

る。また、本稿ではモデルベースのトポロジーを比較対象としたが、脳機能ネットワークのトポロジー特性と通信品質への影響をより明確にするために、脳機能ネットワークのリンクを張り替えることで特性の一部を欠落させたトポロジーに対しても評価を行う予定である。

謝辞 本研究を行うにあたり、NICT の下川哲也氏より脳機能ネットワークに関する議論・ご助言を頂いた。ここに記して謝意を表す。

文 献

- [1] M. Palacin, M. Oliver, J. Infante, S. Oechsner, and A. Bikfalvi, "The impact of content delivery networks on the internet ecosystem," *Journal of Information Policy*, vol.3, pp.304–330, July 2013.
- [2] E. Bullmore and O. Sporns, "The economy of brain network organization," *Nature Reviews Neuroscience*, vol.13, no.5, pp.336–349, April 2012.
- [3] J.K. Rilling, "Comparative primate neuroimaging: insights into human brain evolution," *Trends in Cognitive Sciences*, vol.18, no.1, pp.46–55, Jan. 2014.
- [4] L.K. Gallos, H.A. Makse, and M. Sigman, "A small world of weak ties provides optimal global integration of self-similar modules in functional brain networks," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol.109, no.8, pp.2825–2830, Feb. 2012.
- [5] C. Song, S. Havlin, and H. Makse, "Origins of fractality in the growth of complex networks," *Nature Physics*, vol.2, pp.275–281, April 2006.
- [6] D. Meunier, R. Lambiotte, and E.T. Bullmore, "Modular and hierarchically modular organization of brain networks," *Frontiers in Neuroscience*, vol.4, no.200, pp.1–11, Dec. 2010.
- [7] C. Song, S. Havlin, and H. Makse, "Self-similarity of complex networks," *Nature*, vol.433, pp.392–395, Jan. 2005.
- [8] E. Bullmore and O. Sporns, "Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems," *Nature Reviews Neuroscience*, vol.10, no.3, pp.186–198, March 2009.
- [9] V.D. Blondel, J.L. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefebvre, "Fast unfolding of communities in large networks," *Journal of Statistical Mechanics*, pp.1–12, July 2008.
- [10] L. Li, D. Alderson, W. Willinger, and J. Doyle, "A first-principles approach to understanding the internet's router-level topology," *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, vol.34, no.4, pp.3–14, Aug. 2004.
- [11] A.-L. Barabási and R. Albert, "Emergence of Scaling in Random Networks," *Science*, vol.1999, no.5439, pp.509–512, Oct. 286.
- [12] D.J. Watts and S.H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks," *Nature*, vol.393, no.6684, pp.440–442, June 1998.
- [13] M.P. van denHeuvel, C.J. Stam, R.S. Kahn, and H.E. Hulshoff Pol, "Efficiency of functional brain networks and intellectual performance," *The Journal of Neuroscience*, vol.29, no.23, pp.7619–7624, June 2009.
- [14] B.M. Waxman, "Routing of multipoint connections," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol.6, no.9, pp.1617–1622, Dec. 1988.
- [15] A.F. Alexander-Bloch, P.E. Vértes, R. Stidd, F. Lalonde, L. Clasen, J. Rapoport, J. Giedd, E.T. Bullmore, and N. Gogtay, "The Anatomical Distance of Functional Connections Predicts Brain Network Topology in Health and Schizophrenia," *Cerebral Cortex*, vol.23, no.1, pp.127–138, Jan. 2012.
- [16] J.Y. Yen, "Finding the K Shortest Loopless Paths in a Network," *Management Science*, vol.17, no.11, pp.712–716, July 1971.